Exercices :

115
116

120
121
122
123
124
126
127
128
129

130
131
132
133
135
137

140
141
142
143
144
145
146
147
148
149

150
151
152
153
154
155

Exercice 120

Déterminer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^4+2}$

3 $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

5 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2-x}{\ln x}$

6 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x}{\ln x}$

7 $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[x+x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

8 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x+x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

9 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{\ln(3x)}{3x-1}$

10 $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[(x^2-3x+1)\ln x\right]$

11 $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\ln x)$

12 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+x}{\ln x}$

13 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[3(\ln x)^2-2\ln x+1\right]$

14 $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(e^{2x}-e^x+1\right)$

15 $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(e^{2x}-e^x+1\right)$

16 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\ln x}{x+1}$

17 $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[(x^2-x)\ln x\right]$

18 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[(x^2-x)\ln x\right]$

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$

Posons $y = x+1 \Leftrightarrow x = y-1$

Si $x \to +\infty$, alors $y \to +\infty$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(y)}{y-1}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(y)}{y(1-\frac{1}{y})}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \underbrace{\frac{\ln(y)}{y}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{y}}}_{\to 1}$$

$$= 0$$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^4+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x(x^3+\frac{2}{x})}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^3+\frac{2}{x}}}_{\to 0}$$

$$= 0$$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[x\left(\ln(x+1)-\ln(x)\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[\underbrace{x\ln(x+1)}_{\to 0} - \underbrace{x\ln(x)}_{\to 0}\right]$$

$$= 0$$

$\boxed{4}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

CHANGEMENT DE VARIABLE

Posons que : $B = \dfrac{1}{x}$

Si : $x \to +\infty$, alors $B \to 0$

$$\lim_{B\to 0} \frac{\ln(1+B)}{B} = 1$$

$\boxed{5}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\overbrace{x^2-x}^{\to 0^+}}{\underbrace{\ln(x)}_{\to -\infty}} = 0^+$

$\boxed{6}$ $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x}{\ln(x)}}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{\frac{x-1}{\ln(x)}}_{\to+\infty} = +\infty$$

$\boxed{7}$ $$\lim_{x\to0^+} \left[x + x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to0^+} x\left(1+\underbrace{\ln\left(1+\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to0}\right)}_{\to0}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^+} x$$

$$= 0^+$$

$\boxed{8}$ $$\lim_{x\to+\infty} \left[x + x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

x l'emporte

$$= \lim_{x\to+\infty} x + x$$

$$= +\infty$$

$\boxed{9}$ $$\lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{\ln(3x)}{3x-1}$$

CHANGEMENT DE VARIABLE

Posons que : $v = 3x$

$x \to \frac{1}{3}$, alors $v \to 1$

$$\lim_{v\to1} \frac{\ln(v)}{v-1} = 1$$

$\boxed{10}$ $$\lim_{x\to0^+} \underbrace{(x^2-3x+1)}_{\to1} \underbrace{\ln(x)}_{\to-\infty}$$

$$= -\infty$$

$\boxed{11}$ $$\lim_{x\to+\infty} [x - \ln(x)] = \lim_{x\to+\infty} \overbrace{x}^{\to+\infty}\underbrace{\left(1 - \overbrace{\frac{\ln(x)}{x}}^{\to0}\right)}_{\to1}$$

$$= +\infty$$

$\boxed{12}$ $$\lim_{x\to0^+} \frac{\overbrace{1+x}^{\to1}}{\underbrace{\ln(x)}_{\to1}} = 1$$

$\boxed{13}$ $$\lim_{x\to+\infty} \left\{3[\ln(x)]^2 - 2\ln(x) + 1\right\}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{[\ln(x)]^2}_{\to+\infty} \underbrace{\left[3 - 2\frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{[\ln(x)]^2}\right]}_{\to3}$$

$$= +\infty$$

$\boxed{14}$ $$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left[\underbrace{e^{2x}}_{\to+\infty}\left(1 - \underbrace{\frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}}}_{\to0}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln(+\infty \cdot 1)$$

$$= +\infty$$

$\boxed{15}$ $$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\underbrace{e^{2x}}_{\to0} - \underbrace{e^x}_{\to0} + 1\right) = 1$$

$\boxed{16}$ $$\lim_{x\to0^+} \frac{\overbrace{x\ln(x)}^{\to0}}{\underbrace{x+1}_{\to1}} = 0$$

$\boxed{17}$ $$\lim_{x\to0^+} (x^2-x)\ln(x) = \lim_{x\to0^+} \underbrace{x^2\ln(x)}_{\to0} - \underbrace{x\ln(x)}_{\to0}$$

$$= 0$$

$\boxed{18}$ $$\lim_{x\to+\infty} (x^2-x)\ln(x) = \lim_{x\to+\infty} \overbrace{x^2}^{\to+\infty}\left[\underbrace{\left(1-\frac{1}{x}\right)}_{\to1}\overbrace{\ln(x)}^{\to+\infty}\right]$$

$$= +\infty$$

Exercice 121

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(3x)}{x}$

2 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(-5x)}{x}$

3 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(7x+1)}{x} = 7$

4 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(-5x+1)}{2x} = -\dfrac{5}{2}$

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(3x)}{x} = 0$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(-5x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{\underbrace{x\ln(5x)}_{\to +\infty}}\right) \to 0$

$= 0$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(7x+1)}{x}$

CHANGEMENT DE VARIABLE

Posons $t = 7x \Leftrightarrow x = \dfrac{t}{7}$

Si : $x \to 0$, alors $t \to 0$

$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(t+1)}{\frac{t}{7}} = \lim\limits_{t \to 0} \underbrace{\dfrac{\ln(t+1)}{t}}_{\to 1} \cdot 7 = 7$

$\boxed{4}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(-5x+1)}{2x}$

CHANGEMENT DE VARIABLE

Posons $t = -5x \Leftrightarrow x = -\dfrac{t}{5}$

Si : $x \to 0$, alors $t \to 0$

$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(t+1)}{-2\frac{t}{5}} = \lim\limits_{t \to 0} \underbrace{\dfrac{\ln(t+1)}{t}}_{\to 1} \cdot \left(-\dfrac{5}{2}\right)$

$= -\dfrac{5}{2}$

Exercice 122

1 La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{7x^2 - 5\ln x^2}{4x}.$$

Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de l'ensemble de définition.

2 La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de l'ensemble de définition.

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{7x^2 - 5\ln(x^2)}{4x}$, $D_f =]0; +\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{7x^2-5\ln(x^2)}{4x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{7x^2-10\ln(x)}{4x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{7x^2}{4x}$$
$$= 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{7x^2-5\ln(x^2)}{4x}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{7x^2-10\ln(x)}{4x}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{7x^{\cancel{2}}}{4\cancel{x}}$$
$$= +\infty$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \dfrac{\ln(\sqrt{x^2+1})}{x}$, $D =]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sqrt{x^2+1})}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}{x}$$

CHANGEMENT DE VARIABLE

Posons : $y = x^2 \rightarrow x = \sqrt{y}$

Si $x \to 0^+$, alors $y \to 0^+$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}\ln(y+1)}{\sqrt{y}}$$
$$= \lim_{y\to 0^+} \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{y}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\ln(y+1)}{y}}_{\to 1}$$
$$= 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x^2+1})}{x}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \underbrace{\frac{\frac{1}{2}\ln(x^2(\overbrace{1+\frac{1}{x^2}}^{\to 1}))}{x}}_{\to 0}$$
$$= 0$$

Exercice 123

On note par $\mathscr{C}_f$ et par $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé. Étudier dans les différents cas la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$.

1 $f(x) = 2\ln(3x-1)$ et $g(x) = \ln x$

2 $f(x) = \ln(e^{2x}+5e^x+2)$ et $g(x) = 2x$

3 $f(x) = \ln(4x+1)$ et $g(x) = x+3$

4 $f(x) = \ln(1-5x)$ et $g(x) = 3$

$\boxed{1}$ C.E. $3x-1>0$ et $x>0$ D_f

$x>0$ D_g

$I = D_f \cap D_g = \left]\frac{1}{3} ; +\infty\right[$

$\forall x \in I$: soit $h(x) = f(x) - g(x)$

$$= 2\ln(3x-1) - \ln(x)$$
$$= \ln\left[(3x-1)^2\right] - \ln(x)$$
$$= \ln\left[\frac{(3x-1)^2}{x}\right]$$

Recherche des Racines : $h(x) = 0 \iff \ln\left[\frac{(3x-1)^2}{x}\right] = \ln(1)$

$$\iff \frac{(3x-1)^2}{x} = 1$$
$$\iff \frac{(3x-1)^2 - x}{x} = 0$$
$$\iff (3x-1)^2 - x = 0$$
$$\iff 9x^2 - 7x - 1 = 0$$
$$\Delta = 13$$

Donc : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{7-\sqrt{13}}{18} \simeq 0{,}19 \notin I$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{7+\sqrt{13}}{18} = 0{,}59 \in I$

T.d.s

x	$\frac{1}{3}$		$\frac{7+\sqrt{13}}{18}$		$+\infty$
$h(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
		$\mathcal{C}_g / \mathcal{C}_f$	$\mathcal{C}_g \cap \mathcal{C}_f$	$\mathcal{C}_f / \mathcal{C}_g$	

$\boxed{2}$ C.E. : $e^{2x} + 5e^x + 2 > 0$ toujours vrai

$I = \mathbb{R}$

$\forall x \in I$: Soit $h(x) = f(x) - g(x)$

$$= \ln\left(e^{2x}+5e^{x}+2\right) - 2x$$
$$= \ln\left(e^{2x}+5e^{x}+2\right) - \ln\left(e^{2x}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{e^{2x}+5e^{x}+2}{e^{2x}}\right)$$

Recherche des racines : $\ln\left(\frac{e^{2x}+5e^{x}+2}{e^{2x}}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x}+5e^{x}+2}{e^{2x}} = 1$$
$$\Leftrightarrow \cancel{e^{2x}} + 5e^{x} + 2 = \cancel{e^{2x}}$$
$$\Leftrightarrow e^{x} = -\frac{2}{5} \quad \text{impossible}$$

T.d.S

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h(x)$	$+$

$\mathcal{C}_f / \mathcal{C}_g$

$\boxed{3}$ C.E. : $4x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}$

$D = \left]-\frac{1}{4} ; +\infty\right[$

$\forall x \in D$: soit $h(x) = f(x) - g(x)$

$$= \ln(4x+1) - x+3$$
$$= \ln(4x+1) - \ln\left(e^{x+3}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{4x+1}{e^{x+3}}\right)$$

Recherche des racines : $\ln\left(\frac{4x+1}{e^{x+3}}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{4x+1}{e^{x}+3}\right) = \ln(1)$

$$\Leftrightarrow 4x+1 = e^{x+3}$$
$$\Leftrightarrow e^{x+3} - 4x - 1 = 0$$

Soit $k(x) = e^{x+3} - 4x - 1$

$\forall x \in D : k'(x) = e^{x+3} - 4$

Racines : $k'(x) = 0 \iff e^{x+3} - 4 = 0$

$\iff e^{x+3} = 4$

$\iff x+3 = 2\ln(2) \simeq -1,6 \notin D$

T.d.S

x	$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$k'(x)$	||	$+$	
$h(x)$	|| $e^{\frac{11}{4}}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{4}} k(x) = e^{\frac{11}{4}} > 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} k(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^{x+3}}{x} - 4 - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x\left(\underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to +\infty} e^3 - 4 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)}_{\to +\infty}$$

Comme k est strictement croissante sur I, et $0 \in]e^{\frac{11}{4}} ; +\infty[= k\left(]-\frac{1}{4} ; +\infty[\right)$, $k(x) = 0$ n'admet pas de solution de $h(x)$ ne change pas de signe $\forall x \in D$.

En effet ; $h(x) < 0 \quad \forall x \in D$

(Point test : $h(0) = -3$)

Donc $f(x) < g(x) \quad \forall x \in D$ et $\mathcal{C}_f / \mathcal{C}_g$ sur $]-\frac{1}{4} ; +\infty[$

$\boxed{4}$ C.E : $1 - 5x > 0 \iff -5x > -1$

$\iff x < \frac{1}{5}$

$I =]-\infty ; \frac{1}{5}[$

$\forall x \in I$: Soit $h(x) = f(x) - g(x)$

$$= \ln(1-5x) - 3$$
$$= \ln(1-5x) - \ln(e^3)$$
$$= \ln\left(\frac{1-5x}{e^3}\right)$$

Recherche des racines: $h(x) = 0 \iff \frac{1-5x}{e^3} = 1$

$$\iff 1-5x = e^3$$
$$\iff -5x = e^3 - 1$$
$$\iff x = -\frac{e^3-1}{5} \simeq \underline{-3{,}8} \in \mathbb{R}$$

T.d.s

	$-\infty$		$-\frac{e^3-1}{5}$		$\frac{1}{5}$
$h(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$
		$\mathscr{C}_f / \mathscr{C}_g$	$\mathscr{C}_f \cap \mathscr{C}_g$	$\mathscr{C}_g / \mathscr{C}_f$	

Exercice 124

On note par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. Déterminer dans les différents cas les coordonnées des points d'intersection éventuels entre $\mathscr{C}_f$ et les axes du repère.

1 $f(x) = \ln(x+7)$

2 $f(x) = \ln(x+5) + \ln(6-x)$

3 $f(x) = 2\ln(4x-3) - 3$

Intersection : axe des abscisses	Intersection : axe des ordonnés
$\boxed{1}$ C.E. $x > -7$ $f(0) = \ln(0+7) = \ln(7)$	$f(x) = 0 \iff \ln(x+7) = \ln(1)$ $\iff x = -6$
$\boxed{2}$ $f(0) = \ln(0+5) + \ln(6-0)$ $= \ln(30) \simeq 3{,}401$	$f(x) = 0 \iff \ln(x+5) + \ln(6-x) = \ln(1)$ $\iff (x+5)(6-x) = 1$

$\mathcal{C}_f \cap (0x) = \{(0; \ln(30))\}$

$\Leftrightarrow 6x - x^2 + 30 - 5x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + x - 29 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \quad (\Delta < 0)$

équation impossible dans $\mathbb{R}$ pas de solution, coupe jamais (Oy)

$\boxed{3}$ $f(0) = 2\ln(4 \cdot 0 - 3) - 3$

$= 2\ln(-3) - 3$ ↯

n'existe pas coupe jamais (Ox)

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln(4x-3) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2\ln(4x-3) - \ln(e^3) = 0$

$\Leftrightarrow 2\,\dfrac{\ln(4x-3)}{\ln(e^3)} = 0$

$\Leftrightarrow \ln(4x-3) = \ln(1)$

$\Leftrightarrow x = 1$

Exercice 115

Déterminer le tableau des signes des expressions suivantes :

1 $f(x) = \ln(2x+3)$

2 $f(x) = \ln \dfrac{x+3}{x-4}$

3 $f(x) = \ln(x^2 - 3x - 7)$

4 $f(x) = \dfrac{\ln(5x)}{x-3}$

5 $f(x) = \ln(\ln x)$

$\boxed{1}$ C. E. $2x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$

$D_f = \left]-\frac{3}{2} ; +\infty\right[$

Racines : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(2x+3) = \ln(1)$

$\Leftrightarrow 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

T.d.s

	$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Point test : $x = 0$

$\ln(2x+3) = \ln(3) > 0$

$\boxed{2}$ $f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x-4}\right)$

C.E. : $x-4 \neq 0$ et $\frac{x+3}{x-4} > 0$

$\Leftrightarrow x \neq 4$ et ...

T.d.S

	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+3}{x-4}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Finalement : $D_f =]-\infty; -3[\cup]4; +\infty[$

Racines : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+3}{x-4}\right) = \ln(1)$

$\Leftrightarrow \cancel{x}+3 = \cancel{x}-4$

impossible ! $3 \neq -4$

T.d.S

	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	$\Vert$	//////	$\Vert$	$+$	

Point test $x = -4 \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{8}\right) < 0$

$x = 5 \Rightarrow \ln(8) > 0$

Exercice 126

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x + \dfrac{x\ln(x)}{1-x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1 Vérifier si f est continue en 0.

2 Vérifier si f est continue en 1.

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0} + \underbrace{\frac{x\ln(x)}{1-x}}_{\to 0} = 0 = f(0)$

f est continue en 0

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x + \dfrac{x\ln(x)}{1-x}$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \underbrace{x}_{\to 1} - \underbrace{x}_{\to 1}\underbrace{\dfrac{\ln(x)}{x-1}}_{\to 1}$

$= 1-1$

$= 0 \; (=f(1))$

Donc f est continue en 1.

Exercice 127

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x\ln(x) - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Est-ce que la fonction f est dérivable au point d'abscisse 0 ?

Vérifions d'abord si f est continue en 0 :

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad (=f(0))$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{x\ln(x)}_{\to 0} - \underbrace{x}_{\to 0} = 0 \quad (=f(0))$

Donc f est continue en 0.

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

CHANGEMENT DE VARIABLE

posons : $t = \frac{1}{x} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{t}$

Si $x \to 0^-$, alors $t \to -\infty$

$$= \lim_{t \to -\infty} \frac{e^t}{\frac{1}{t}}$$

$$= \lim_{t \to -\infty} t e^t$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x\ln(x) - x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \overbrace{\ln(x)}^{\to -\infty} - 1$$

$$= -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 128

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-4x)}{2x} & \text{si } x < 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Vérifier si f est dérivable en 0.

f est continue en 0 ?

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(1-4x)}{2x} \longrightarrow \text{f.i.} \gg \frac{0}{0} \ll$$

CHANGEMENT DE VARIABLE

Posons : $t = 1-4x \iff x = \frac{t-1}{4}$

Si $x \to 0^-$, alors $t \to 1^+$

$$= \lim_{t\to 1^+} \frac{\ln(t)}{\frac{1-t}{2}}$$

$$= \lim_{t\to 1^+} 2 \cdot \frac{\ln(t)}{1-t}$$

$$= \lim_{t\to 1^+} -2 \cdot \underbrace{\frac{\ln(t)}{t-1}}_{\to 1}$$

$$= -2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x}$$

$$= 1 \quad (\neq 2)$$

Donc f n'est pas continue en 0, d'où f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 129

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 + \dfrac{\ln x}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1 Étudier la continuité de f en 1.

2 Étudier la dérivabilité de f en 1.

$\boxed{1}$ $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 1 + \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\to 0}$$

$$= 1 \quad (= f(1))$$

Donc f est continue en 1.

$\boxed{2}$ $$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1+\frac{\ln(x)}{x}-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln(x)}{x(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\ln(x)}{x-1}}_{\to 1}$$

$$= 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} x+1$$

$$= 2 \quad (\neq 1)$$

Donc f n'est pas dérivable en 1.

Exercice 115

Déterminer le tableau des signes des expressions suivantes :

1 $f(x) = \ln(2x+3)$

2 $f(x) = \ln \dfrac{x+3}{x-4}$

3 $f(x) = \ln(x^2 - 3x - 7)$

4 $f(x) = \dfrac{\ln(5x)}{x-3}$

5 $f(x) = \ln(\ln x)$

$\boxed{1}$ C.E. : $2x+3 > 0 \iff x > -\frac{3}{2}$

$D_f = \left]-\frac{3}{2} ; +\infty\right[$

Racines : $f(x) = 0 \iff \ln(2x+3) = 0$

$$\iff 2x+3 = 1$$

$$\iff x = -1 \quad (\in D)$$

T.d.s.

	$-\frac{3}{2}$		-1		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$\boxed{2}$ C.E. : $\dfrac{x+3}{x-4} > 0$

$x+3>0$ ou $x+3<0$ et $x-4>0$ et $x-4<0$

$\Leftrightarrow x>-3$ ou $\underline{x<-3}$ et $\underline{x>4}$ ou $x<4$

$D_f =]-\infty ; -3[\cup]4 ; +\infty[$

Racines : $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+3}{x-4}\right)=0$

$\Leftrightarrow \ln(x+3) = \ln(x-4)$

$\Leftrightarrow \cancel{x}+3 = \cancel{x}-4$

$\Leftrightarrow 3 \neq -4$ ↯ impossible

T.d.s :

	$-\infty$	-3		4	$+\infty$
$f(x)$	$-$	‖		‖	$+$

Point-test :

$x_- = f(-4) = \ln\left(\frac{1}{8}\right)$ (<0)

$x_+ = f(3) = \ln(8)$ (>0)

$\boxed{3}$ C.E. : $x^2-3x-7>0$

$\Delta = 9-4\cdot 1\cdot(-7)$

$= 37$ (>0) deux solutions dans $\mathbb{R}$

$x_1 = \frac{3-\sqrt{37}}{2} = -1{,}54\ldots$

$x_2 = \frac{3+\sqrt{37}}{2} = 4{,}54\ldots$

T.d.s :

	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f =]-\infty ; x_1[\cup] x_2 ; +\infty[$

Racines : $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x^2-3x-7) = \ln(1)$

$\iff x^2 - 3x - 8 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$
$$= 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)$$
$$= 41 \ (>0) \text{ deux solutions dans } \mathbb{R}$$

$$x_3 = \frac{3-\sqrt{41}}{2} = -1{,}701\ldots \quad (\notin D)$$

$$x_4 = \frac{3+\sqrt{41}}{2} = 4{,}701\ldots \quad (\in D)$$

T.d.s

	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{41}}{2}$		$\frac{3-\sqrt{37}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{37}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{41}}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\|$		$\|$	$-$	0	$+$	

$\boxed{4}$ C.E.: $5x > 0$ et $x - 3 \neq 0$

$\iff x > 0$ et $x \neq 3$

$D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{3\}$

Racines: $f(x) = 0 \iff \dfrac{\ln(5x)}{x-3} = 0$

$\iff \ln(5x) = \ln(1)$

$\iff 5x = 1$

$\iff x = \frac{1}{5} \quad (\in D_f)$

T.d.s:

	0		$\frac{1}{5}$		3		$+\infty$
$\ln(5x)$	$\|$	$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$\boxed{5}$ C.E.: $\ln(x) > 0$ et $x > 0$

$\Leftrightarrow x > 1$ et $x > 0$

$D_f =]1 ; +\infty[$

<u>Racines:</u> $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln[\ln(x)] = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 1$

$\Leftrightarrow x = e \quad (\in D_f)$

<u>T.d.s:</u>

	1		e		$+\infty$
$f(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

Exercice 116

Vérifier si les équations suivantes admettent une(des) solution(s) sur l'intervalle I considéré.

1 $\ln x = \dfrac{x^2 - 5}{x + 2}$ sur $I = [1; 10]$

2 $3x = 1 + \ln(2 + x^2)$ sur $I = [0; 1]$

$\boxed{1}$ C.E.: $x > 0$ et $x + 2 \neq 0$

$D_f = \mathbb{R}_+^*$ Donc $I \subset D_f$

$\forall x \in I$:

$$\ln(x) = \frac{x^2 - 5}{x + 2} \Leftrightarrow \ln(x) - \frac{x^2 - 5}{x + 2} = 0$$

$\forall x \in I$, soit $f(x) = \ln(x) - \dfrac{x^2 - 5}{x + 2}$

$\forall x \in I$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x(x+2) - (x^2 - 5) \cdot 1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{2x^2 + 4x - x^2 + 5}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(x+2)^2 - (x^2 + 4x + 5)x}{x \cdot (x+2)^2}$$

$$= \frac{-x^3 - 3x^2 - x + 4}{x(x+2)^2}$$

$\forall x \in I$, soit $g(x) = -x^3 - 3x^2 - x + 4$

$\forall x \in I$, $g'(x) = -3x^2 - 6x - 1$

<u>Recherche des racines :</u> $\Delta = 24$ (>0)

2 solutions réels

$$x_1 = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{-6} = -1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \simeq -0{,}2 \ (\notin I)$$

$$x_2 = \frac{6 + 2\sqrt{2}}{-6} = -1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \simeq -1{,}8 \ (\notin I)$$

<u>T.d.V</u>

	1		10
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	-10	$\searrow$	-361

$\lim\limits_{x \to 1} g(x) = -10$

$\lim\limits_{x \to 10} g(x) = -361$

$g(x)$ est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[1;10]$, et $g([1;10]) = [-361;-10]$

Donc $g([1;10]) = [-361;-10]$

et $g(x) < 0 \ \forall x \in [1;10]$

D'où.

T.d.v

	1		10
$g(x)$		$-$	
$x(x+2)^2$		$+$	
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	$\simeq -5{,}6$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = \frac{4}{3}$

$\lim\limits_{x \to 10} f(x) = f(10) = \ln(10) - \frac{95}{12} \simeq -5{,}6$

Comme f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]1;10[$, et $0 \in]\ln(10) - \frac{95}{12} ; \frac{4}{3}[= f(]1;10[)$

$\Rightarrow f(x) = 0$ admet une solution unique sur $[1;10]$

$\boxed{2}$ C.E. $2 + x^2 > 0$

$D_f = \mathbb{R}$ Donc $I \subset D$

$\forall x \in I$: $3x = 1 + \ln(2+x^2) \Leftrightarrow 1 + \ln(2+x^2) - 3x = 0$

$\forall x \in I$, soit $f(x) = 1 + \ln(2+x^2) - 3x = 0$

$\forall x \in I$: $f'(x) = \frac{1}{2+x^2} \cdot 2x - 3x$

$$= \frac{2x - 6 - 3x^2}{2+x^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 2x - 6}{2+x^2}$$

Valeurs critiques : $f'(x) = 0 \iff -3x^2+2x-6 = 0$

$$\Delta = -68 \ (<0)$$

pas de solutions dans $\mathbb{R}$

D'où $-3x^2+2x-6 < 0 \quad \forall x \in I$

, car $a = -3 < 0$

De plus, $(2+x)^2 > 0 \quad \forall x \in I$

Donc $f'(x) < 0$

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$1+\ln(2)$	$\searrow$	$-2+\ln(3)$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$
$= 1+\ln(2)$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$
$= -2+\ln(3)$

Comme f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]0;1[$, et $0 \in]1+\ln(2) ; -2+\ln(3)[= f(]0;1[)$

$\Rightarrow f(x) = 0$ admet une solution unique sur $[0;1]$.

Exercice 130

Dans chacun des cas suivants, on donne la fonction f définie sur l'intervalle I. Déterminer la fonction dérivée f' sur I.

1 $f(x)=\ln\left(x^2+1\right) \quad I=\mathbb{R}$

2 $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) \quad I=]1;+\infty[$

3 $f(x)=\ln(x-1)-\ln x \quad I=]1;+\infty[$

4 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \quad I=]0;+\infty[$

5 $f(x)=\ln(\ln x) \quad I=]e;+\infty[$

6 $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} \quad I=]1;+\infty[$

7 $f(x)=e^{-x}\ln x \quad I=]0;+\infty[$

8 $f(x)=e^{x\ln x} \quad I=]0;+\infty[$

9 $f(x)=\ln\left(1+e^x\right) \quad I=\mathbb{R}$

10 $f(x)=\ln\left(e^{2x}-e^x+1\right) \quad I=\mathbb{R}$

$\boxed{1}$ $\forall x\in I$:

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$

$\boxed{2}$ $f(x)=\ln(x-1)-\ln(x+1)$

$$\forall x\in I : f'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$$

$$=\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$\boxed{3}$ $\forall x\in I$:

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$$

$\boxed{4}$ $\forall x\in I$: $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$

$$=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2-x}$$

$\boxed{5}$ $f(x)=\ln[\ln(x)]$

$u(x)=\ln(x) \quad u'(x)=\dfrac{1}{x}$

$\forall x\in I$:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$$

$$=\frac{1}{x\ln(x)}$$

$\boxed{6}$

$u(x)=\ln(x+1) \quad u'(x)=\dfrac{1}{x+1}$

$v(x)=\ln(x) \quad v'(x)=\dfrac{1}{x}$

① ②

$\forall x\in I$:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x+1}\cdot\ln(x)-\ln(x+1)\cdot\frac{1}{x}}{\ln(x)^2}$$

$$=\frac{\frac{\ln(x)\cdot x}{x(x+1)}-\frac{\ln(x+1)(x+1)}{x(x+1)}}{\ln(x)^2}$$

$$=\frac{\ln(x)\cdot x-\ln(x+1)(x+1)}{x(x+1)\ \ln(x)^2}$$

$\boxed{7}$

$u(x)=e^{-x} \quad u'(x)=-e^{-x}$

$v(x)=\ln(x) \quad v'(x)=\dfrac{1}{x}$

$\forall x\in I$:

$$f'(x)=-e^{-x}\ln(x)+e^{-x}\frac{1}{x}$$

$$=e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\ln(x)\right)$$

$\boxed{8}$ $\forall x\in I$:

$$f'(x)=\left(e^{x\ln(x)}\right)'$$

$$=e^{x\ln(x)}\cdot\left(\ln(x)+1\right)$$

$\boxed{9}$ $\forall x \in I$:

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$\boxed{10}$ $\forall x \in I$:

$$f'(x) = \left(\ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)\right)'$$

$$= \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$

Exercice 131

On donne la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$$

Déterminer la fonction dérivée de f. Écrire le résultat sous la forme la plus simple.

$\forall x \in I$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}\right)\right)'$$

$u(x) = 1-\sin(x)$ $\quad$ $u'(x) = -\cos(x)$

$v(x) = 1+\sin(x)$ $\quad$ $v'(x) = +\cos(x)$

$$= \frac{1}{2} \frac{\cancel{1+\sin(x)}}{1-\sin(x)} \cdot \frac{-\cos(x)(1+\sin(x)) - \cos(x)(1-\sin(x))}{\left[1+\sin(x)\right]^{\cancel{2}\, 1}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{-\cos(x) \cancel{+\sin(x)\cos(x)} - \cos(x) \cancel{-\sin(x)\cos(x)}}{1-\sin^2(x)}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \frac{-\cancel{2}\cancel{\cos(x)}}{\cos^{\cancel{2}}(x)}$$

$$= -\frac{1}{\cos(x)}$$

$$= -\sec(x)$$

Exercice 132

Étudier les variations de la fonction f définie par :

1 $f(x) = \ln(x^2 + 7x - 8)$

2 $f(x) = \ln\sqrt{x^2 - 4}$

3 $f(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x + 3)$

4 $f(x) = \ln \dfrac{x}{-3x + 4}$

5 $f(x) = \ln(\ln 2x)$

6 $f(x) = \dfrac{1 + \ln(3x)}{x}$

$\boxed{1}$ C.E. : $x^2 + 7x - 8 \neq 0$

<u>Discriminant :</u> $\Delta = b^2 - 4ac$

$= 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)$

$= 81 \ (>0)$ deux solutions réels

$= 9^2$

$x_1 = \dfrac{-7-3}{2 \cdot 1} = -5$

$x_2 = \dfrac{-7+3}{2} = -2$

$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-5; -2\}$

$\forall x \in D_{f'}$: $f'(x) = [\ln(x^2 + 7x - 8)]'$

$= \dfrac{1}{x^2 + 7x - 8} \cdot 2x + 7$

$= \dfrac{2x+7}{x^2+7x-8}$

<u>Valeurs critiques</u> : $f'(x)=0 \iff 2x+7=0$

$$\iff x = -\frac{7}{2}$$

<u>T.d.V</u>

x	$-\infty$		-2		$-\frac{7}{2}$		-5		$+\infty$
$2x+7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+7x-8		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-18 \;\|\|\; -18$	$\nearrow$	$-\frac{81}{4}$	$\searrow$	$-18 \;\|\|\; -18$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{\substack{x\to-\infty \\ x\to+\infty}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ x\to+\infty}} \ln(\underbrace{x^2+7x-8}_{\to+\infty}) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-2^- \\ x\to-2^+}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-2^- \\ x\to-2^+}} \ln(x^2+7x-8)$$

$$= -18$$

$$\lim_{\substack{x\to-5^- \\ x\to-5^+}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-5^- \\ x\to-5^+}} \ln(x^2+7x-8)$$

$$= -18$$

$$f\left(-\frac{7}{2}\right) = \ln\left[\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 7\left(-\frac{7}{2}\right) - 8\right] = -\frac{81}{4}$$

$\boxed{2}$ C.E. $x^2-4>0 \iff x^2>4$

$$\iff x>2 \quad \text{ou} \quad x<-2$$

$D_f =]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

$\forall x \in D_f'$: $f'(x) = \left[\ln\left(\sqrt{x^2-4}\right)\right]'$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-4}} \cdot 2x$$

$$= \frac{2x}{2x^2-8}$$

<u>Valeurs critiques</u> : $f'(x)=0 \iff 2x=0$

$\iff x=0 \quad (\notin D_f)$

<u>T.d.v</u>

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	$\Vert$				$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \ \Vert$				$\Vert \ -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{\substack{x\to-\infty \\ x\to+\infty}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ x\to+\infty}} \overbrace{\ln(\underbrace{\sqrt{x^2-4}}_{\to+\infty})}^{\to+\infty} = +\infty$$

- $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^-} \ln\left(\sqrt{x^2-4}\right) \longrightarrow$ Posons $t=\sqrt{x^2-4}$, si $x\to-2^-$, alors $t\to0^+$

$$\lim_{t\to0^+} \ln(t) = -\infty$$

- $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} \ln\left(\sqrt{x^2-4}\right) \longrightarrow$ Posons $t=\sqrt{x^2-4}$, si $x\to2^+$, alors $t\to0^+$

$$\lim_{t\to0^+} \ln(t) = -\infty$$

Exercice 133

Déterminer le tableau des signes des expressions suivantes :

1 $f(x) = x\ln x + 1$

2 $f(x) = \ln \dfrac{x-2}{x+3} - x$

3 $f(x) = \ln\left(e^{2x} - 2e^{x} + 1\right) - 2x$

4 $f(x) = \ln\left(e^{-2x} + 3e^{-x} - 4\right) + 2x$

$\boxed{1}$ C.E. : $x > 0$

$D_f = \mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in D_f : \quad f'(x) = \frac{1}{x} \cdot x + \ln(x)$

$= \ln(x) + 1$

Valeurs critiques :

$f'(x) = 0 \iff \ln(x) + 1 = 0$

$\iff \ln(x) = -1$

$\iff x = e^{-1}$

T.d.v

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ 1	$\searrow$	$\simeq 0{,}63$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \overbrace{x\ln(x)}^{\to 0} + 1 = 1$

$f(e^{-1}) = e^{-1}\cdot(-1) + 1 = e^{-1} + 1 \simeq 0{,}63$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

Comme f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur

$]0; e^{-1}[$, respectivement strictement décroissant sur $]e^{-1}; +\infty[$, et
$0 \notin]e^{-1}+1; 1[= f(]0; e^{-1}[)$, respectivement
$0 \notin]-e^{-1}+1; +\infty[= f(]e^{-1}; +\infty[)$
$\Rightarrow f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}_+^*$

$\boxed{2}$ C.E. $x+3 \neq 0$ et $\frac{x-2}{x+3} > 0$

$\Leftrightarrow x \neq -3$ et $x-2>0$ et $x+3>0$ ou $x-2<0$ et $x+3<0$

$\Leftrightarrow x \neq -3$ et $x>2$ et $x>-3$ ou $x<2$ et $x<-3$

$\Leftrightarrow -3 < x < 2$

$D_f =]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$

$\forall x \in D_{f'}$: $f'(x) = \left[\ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right) - x\right]'$

$$= \frac{1}{\frac{x-2}{\cancel{x+3}}} \cdot \frac{1(x+3)-(x-2)\cdot 1}{(x+3)^{\cancel{2}}} - 1$$

$$= \frac{1}{x-2} \cdot \frac{5}{x+3} - 1$$

$$= \frac{5-(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)}$$

Valeurs critiques : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5-(x-2)(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow 5-(x^2+x-6) = 0$

$\Leftrightarrow -x^2-x+11 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 11$

$= 45 \; (>0)$

deux solutions réeles

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{1-3\sqrt{5}}{-2} \simeq 2{,}85 \in D_f$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{1+3\sqrt{5}}{-2} \simeq -3{,}35 \in D_f$$

T.d.V

x	$-\infty$		x_2		-3		2		x_1		$+\infty$
$-x^2-x+11$		$-$	0	$+$	‖		‖	$+$	0	$-$	
$(x-2)(x+3)$		$+$		$+$	‖		‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖		‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$					‖		‖				

$\boxed{3}$ C.E. $e^{2x}-2e^x+1>0 \iff (e^x-1)^2>0$

$\iff e^x-1\neq 0$

$\iff e^x\neq 1$

$\iff x\neq 0$

$D_f=\mathbb{R}^*$

$\forall x\in\mathbb{R}^*:\quad f(x)=0 \iff \ln(e^{2x}-2e^x+1)-2x=0$

$\iff \ln(e^{2x}-2e^x+1)=2x$

$\iff \cancel{e^{2x}}-2e^x+1=\cancel{e^{2x}}$

$\iff -2e^x+1=0$

$\iff e^x=\frac{1}{2}$

$\iff x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)\in D_f$

T.d.s

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	

Exercice 135

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique d dont on déterminera une équation.
4. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport la droite d.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

$\boxed{1}$ C.E. $x-1 \neq 0$ et $\frac{2x}{x-1} > 0$

$\iff x \neq 1$ et $2x > 0$ et $x-1 > 0$ ou $2x < 0$ et $x-1 < 0$

$\iff x \neq 1$ et $\underline{x > 0}$ et $x > 1$ ou $x < 0$ et $\underline{x < 1}$

$\iff 0 < x < 1$

$D_f =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{1}{2}x}_{\to -\infty} + \underbrace{\ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)}_{\to \ln(2)}$

$= -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{1}{2}x}_{\to +\infty} + \underbrace{\ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)}_{\to \ln(2)}$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \underbrace{\frac{1}{2}x}_{\to 0} + \underbrace{\ln\left(\underbrace{\frac{2x}{x-1}}_{\to 0^+}\right)}_{\to -\infty}$

$= -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \underbrace{\frac{1}{2}x}_{\to \frac{1}{2}} + \underbrace{\ln\left(\underbrace{\frac{2x}{x-1}}_{\to +\infty}\right)}_{\to +\infty}$

$= +\infty$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[\frac{1}{2} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\underbrace{\ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)}_{\to \ln(2)}}_{\to 0}\right]$

$= \frac{1}{2}$

D'où $a = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x\right] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \overbrace{\ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)}^{\to \ln(2)}$

$= \ln(2)$

Alors $b = \ln(2)$ et A.O. $\equiv y = \frac{1}{2}x + \ln(2)$

en $+\infty$ et en $-\infty$

$\boxed{4}$ $\forall x \in D_f$, $h(x) = f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \ln(2)\right)$

$$= \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right) - \ln(2)$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{\cancel{2}x}{x-1}}{\cancel{2}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

Racine de $h(x)$:

$\forall x \in D_f$: $h(x) \neq 0 \iff \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \neq 0$

$\iff \frac{x}{x-1} \neq 1$

$\iff -1 \neq 0$ ↯ impossible

$\forall x \in D_f$, $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0 \iff \frac{x}{x-1} > 1$

$\iff \frac{1}{x-1} > 0$

$\iff x - 1 > 0$

$\iff x > 1$

D'où T.ds

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$h(x)$		$-$	‖	//////	‖	$+$	
		$d/\mathcal{C}_f$				$\mathcal{C}_f/d$	

$\boxed{5}$ $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{2x}{x-1}} + \frac{2(x+1) - 2x}{(x-1)^2}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{2}x} \cdot \frac{-\cancel{2}}{(x-1)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{x(x-1)}$$

$$= \frac{x(x-1)-2}{2x(x-1)}$$

$$= \frac{x^2-x-2}{2x(x-1)}$$

<u>Valeurs critiques:</u> $f'(x) = 0 \iff x^2 - x - 2 = 0$

$$\Delta = 9$$

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 2$$

T.d.v

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	||		||	$-$	0	$+$	
$2x$		$-$		$-$	0		||	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	||		0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	||		||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$ $-\infty$	||		|| $+\infty$	$\searrow$	$1+\ln(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1) = -\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{-2}{-2}\right) = -\frac{1}{2}$

$f(2) = 1 + \ln(4)$

Exercice 137

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right)$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1 Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2 Est-ce que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote parallèle à l'axe des abscisses ? Justifier.

3 Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.

4 Dresser le tableau de variation de f.

5 Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ dont on déterminera une équation.

6 Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.

7 Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.

$\boxed{1}$ C.E. : $e^{2x} - e^{x} + 1 > 0$

Posons : $y = e^{x}$

$\Leftrightarrow y^2 - y + 1 > 0$

$\Delta = -3$ (0 solutions dans $\mathbb{R}$)

$D_f = \mathbb{R}$

$\boxed{2}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln\left[\underbrace{e^{x}}_{\to +\infty}\left(\underbrace{e^{x}}_{\to +\infty} - 1 + \frac{1}{\underbrace{e^{x}}_{\to 0}}\right)\right]$$

$$= +\infty$$

$\Rightarrow$ pas d'A.H. en $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\underbrace{e^{2x}}_{\to 0} - \underbrace{e^{x}}_{\to 0} + 1\right)$$

$$= \ln(1)$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ A.H. : $y = 0$ en $+\infty$

$\boxed{3}$ $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{2e^{2x} - e^{x}}{e^{2x} - e^{x} + 1}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - e^{x} = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{x}}_{> 0}(2e^{x} - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2e^{x} = 1$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln(2)$$

T.d.s

	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$2e^x-1$		$-$	0	$+$	
$e^{2x}-e^x+1$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

$\boxed{4}$ T.d.v

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \ln\left(e^{2\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + 1\right)$$
$$= \ln\left(1 - \frac{1}{2} + 1\right)$$
$$= \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(e^{2x} - e^x + 1)$$
$$= \ln(1)$$
$$= 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(e^{2x} - e^x + 1)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\Big[\underbrace{e^{2x}}_{\to+\infty}\underbrace{(1 - \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} + \underbrace{e^{-2x}}_{\to 0})}_{\to 1}\Big]$$
$$= +\infty$$

$\boxed{5}$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^{2x} - e^x + 1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln[e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x})]}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^{2x})}{x} + \frac{\ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{\ln\overbrace{(1-e^{-x}+e^{-2x})}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{\to +\infty}} \right) \to 0$$

$$= 2$$

Donc : $a = 2$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - 2x \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\ln(e^{2x} - e^{x} + 1) - 2x \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\ln\left(e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x}) \right) - 2x \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\cancel{2x} + \ln(\underbrace{1 - e^{-x} + e^{-2x}}_{\to 0}) \cancel{-2x} \right]$$

$$= \ln(1)$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ A.O. $\equiv y = 2x$ en $+\infty$

$\boxed{6}$ $f(x) - 2x > 0 \iff \ln(e^{2x} - e^{x} + 1) - \ln(e^{2x}) > 0$

$$\iff \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right) > 0$$

$$\iff 1 - e^{-x} + e^{-2x} > 1 \qquad | \cdot e^{2x}$$

$$\iff e^{2x} - e^{x} > 0$$

$$\iff e^{x}(e^{x} - 1) > 0$$

$$\iff e^{x} = \underline{1}$$

$$\iff x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-2x$		$+$	0	$-$	
		$\mathcal{C}_f / A.O.$	$A.O. \cap \mathcal{C}_f$	$A.O. / \mathcal{C}_f$	

$\boxed{7}$

Exercice 143

1 On considère la fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = \ln x + \frac{x^2 - x + 1}{2x^2}.$$

a. Montrer que sa dérivée est : $h'(x) = \dfrac{2x^2 + x - 2}{2x^3}$.

b. Déterminer le signe de $h(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

2 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(x^2 + 1\right)\ln x - x.$$

a. Calculer la dérivée de f.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

$\boxed{1}$

a. $\forall x \in D_{f'}$:

$$h'(x) = \left(\ln(x) + \frac{x^2 - x + 1}{2x^2}\right)'$$

$$\left|\begin{array}{ll} u(x) = x^2 - x + 1 & u'(x) = 2x - 1 \\ v(x) = 2x^2 & v'(x) = 4x \end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{(2x-1)\,2x^2 - 4x(x^2 - x + 1)}{(2x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{\cancel{4x^3} - \cancel{2}^{1}x^2 - \cancel{4x^3} + \cancel{4}^{2}x^2 - \cancel{4}^{2}x}{\cancel{4}_{2}x^4}$$

$$= \frac{2x^3}{2x^4} + \frac{x^2 - 2x}{2x^4}$$

$$= \frac{2x^{\cancel{3}\,2} + x^{\cancel{2}\,1} - 2\cancel{x}^{0}}{2x^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{2x^2 + x - 2}{2x^3}$$

b. Valeurs critiques : $h'(x) = 0 \iff 2x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)$
$= 33 \quad (>0)$
deux solutions réels

Donc : $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} \quad (\notin D_f)$

$x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} \quad (\in D_f)$

T.d.v

x	0		$\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$		$+\infty$
$2x^2+x-2$		$-$	0	$+$	
$2x^3$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\simeq 0{,}283$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[\ln(x) + \frac{x^2 - x + 1}{2x^2}\right] = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty}\left(\underbrace{x\ln(x)}_{\to 0} + \underbrace{\frac{x^2-x+1}{2x}}_{\to +\infty}\right) = +\infty$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty}\left(\underbrace{x\ln(x)}_{\to 0} + \underbrace{\frac{x^2-x+1}{2x}}_{\to +\infty}\right)$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\ln(x) + \frac{x^2 - x + 1}{2x^2} \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln(x) + \frac{1}{2}$$

$$= +\infty$$

La fonction est toujours positive car le minimum, la fonction atteint sur D_f est environ 0,283

$\boxed{2}$

a. $\forall x \in D_{f'}$:

$$f'(x) = \left[(x^2+1)\ln(x) - x \right]'$$

$$= 2x\ln(x) + (x^2+1) \cdot \frac{1}{x} - 1$$

$$= 2x\ln(x) + \frac{x^2 - x + 1}{x}$$

$$= 2x \underbrace{\left[\ln(x) + \frac{x^2 - x + 1}{2x^2} \right]}_{\to h(x)}$$

$$= 2x \cdot h(x)$$

b) $f'(x) = 0 \iff 2x \cdot \underbrace{h(x)}_{>0} = 0$

$$\iff x = 0 \quad (\notin D_f)$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \Big[\underbrace{(x^2+1)}_{\to 1}\underbrace{\ln(x)}_{\to -\infty} \underbrace{-x}_{\to 0}\Big]$$
$$= -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[(x^2+1)\ln(x) - x\right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(x^2\ln(x) + \ln(x) - x\right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{\to +\infty}\Big(\underbrace{x\ln(x)}_{\to +\infty} + \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\to 0} - 1\Big)$$
$$= +\infty$$

c)

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗ 0	$+\infty$

f est dérivable en $]0;+\infty[$, est continue en $]0;+\infty[$

f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et

$0 \in]-\infty;+\infty[= f(]0;+\infty[)$.

$f(x)=0$ admet une seule solution α sur $]0;+\infty[$

D'après la calculatrice : $\underline{1{,}5 < \alpha < 1{,}6}$

Exercice 144

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - ex - 2\ln x.$$

1 Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2 Déterminer le tableau de variations de g.

3 Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

On notera α cette solution et on en donnera une valeur approchée à 0,01 près.

4 Donner alors le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x + ex}{x^2}.$$

1 Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2 Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ et en déduire les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

Partie A :

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{1 - ex}_{\to 0} \underbrace{- 2\ln(x)}_{\to -\infty} \Rightarrow A.V. \equiv x = 0$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - ex - 2\ln(x)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} - e - \underbrace{\frac{2\ln(x)}{x}}_{\to 0}\right)$

$= -\infty$

$\boxed{2}$ $\forall x \in D_{g'}$: $g'(x) = \left(1 - ex - 2\ln(x)\right)'$

$= -e - 2\dfrac{1}{x}$

$= -e - \dfrac{2}{x}$

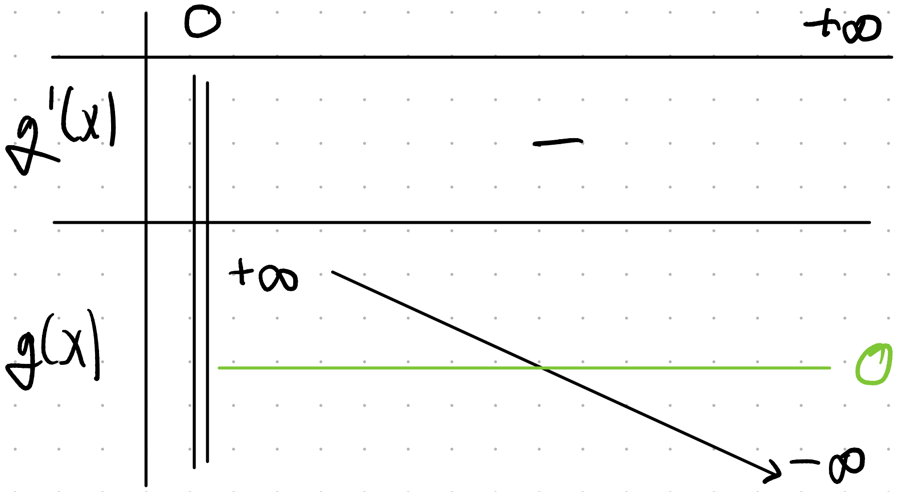
Valeurs critiques : $g'(x) = 0 \iff -e - \dfrac{2}{x} = 0$

$\iff -\dfrac{2}{x} = e$

$\iff \dfrac{x}{2} = -e^{-}$

$\iff x = -2e^{-} \; (\notin D_g)$

T.d.V



$\boxed{3}$ Comme g est dérivable sur $]0;+\infty[$, donc continue sur $]0;+\infty[$ et g est strictement décroissante $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x)=0$ admet une seule solution α sur $]0;+\infty[$.

Calculatrice : $\underline{0{,}66 < \alpha < 0{,}67}$

Partie B :

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)+ex}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to +\infty}\left(\underbrace{\ln(x)}_{\to -\infty} + \underbrace{ex}_{\to 0}\right)$

$= -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)+ex}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \underbrace{\frac{\ln(x)}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{e}{x}}_{\to 0}$

$= 0$

$\boxed{2}$ $f'(x) = \left(\dfrac{\ln(x)+ex}{x^2}\right)'$

$= \dfrac{\left(\frac{1}{x}+e\right)x^{\cancel{2}\,1} - (\ln(x)+ex)\cdot 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}}$

$= \dfrac{1+ex-2\ln(x)-2ex}{x^3}$

$= \dfrac{1-ex-2\ln(x)}{x^3}$

$= \dfrac{g(x)}{x^3}$ cqfd.

$u(x) = \ln(x) + ex$ $\quad u'(x) = \dfrac{1}{x} + e$

$v(x) = x^2$ $\quad v'(x) = 2x$

① ②

<u>Valeurs critiques</u> : $f'(x) = 0 \iff g(x) = 0$
$\iff x = \alpha$

<u>T.d.v</u>

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0

Exercice 145

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x-1}{x}\ln x$
Dresser le tableau de variations de la fonction f.

C.E. $x \neq 0$ et $x > 0$

$\iff x > 0$

$D_f = \mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in D_f,\ f'(x) = \dfrac{x - 1 + \ln(x)}{x^2}$

Valeurs critiques : $f'(x) = 0 \iff x - 1 + \ln(x) = 0$

Posons : $g(x) = x - 1 + \ln(x)$

$\forall x > 0$: $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

$= \dfrac{x+1}{x}$

Valeurs critiques : $g'(x) = 0$

$\iff x = -1 \ (< 0)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\ln(x)\right]$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\ln(x)\right]$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty}\underbrace{(x-1)}_{\to -1}\underbrace{\ln(x)}_{\to -\infty}\right]$$

$$= +\infty$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\ln(x)}_{\to+\infty} - \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\to 0}\right]$$

$$= +\infty$$

T.d.v.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	
$g(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[\underbrace{x-1}_{\to -1}+\underbrace{\ln(x)}_{\to -\infty}\right]$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty}\left[\underbrace{x-1}_{\to +\infty}+\underbrace{\ln(x)}_{\to +\infty}\right]$$

$$= +\infty$$

$g(x)$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, et $0 \in]-\infty;+\infty[= g(]0;+\infty[)$

$g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$

en effet : $g(1) = 1 - 1 + \ln(1)$

$= 0$

T.d.v.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 146

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x+\ln(5x)}{x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

1 Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition et interpréter graphiquement.

2 Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite d d'équation $y = 1$.

3 Dresser le tableau de variations de f.

4 Tracer les asymptotes et $\mathscr{C}_f$.

$\boxed{1}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+\ln(5x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} 1 + \overbrace{\frac{1}{x}}^{\to +\infty}\underbrace{\ln(5x)}_{\to -\infty}$$

$$= -\infty$$

$\Rightarrow$ A.V. : $x = 0$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+\ln(5x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} 1 + \underbrace{\frac{\ln(5x)}{x}}_{\to 0}$$

$$= 1$$

$\Rightarrow$ A.V. : $y = 1$ en $+\infty$

$\boxed{2}$

$$f(x) - 1 = \frac{x+\ln(5x)}{x} - 1$$

$$= \frac{x-x+\ln(5x)}{x}$$

$$= \frac{\ln(5x)}{x}$$

$$f(x) - 1 = 0 \iff \ln(5x) = 0$$

$$\iff 5x = 1$$

$$\iff x = \frac{1}{5}$$

T.d.s.

x	0		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$f(x)-1$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
	$\Vert$	$d / \mathcal{C}_f$	$d \cap \mathcal{C}_f$	$\mathcal{C}_f / d$	

$\boxed{3}$ $\forall x>0$: $f'(x) = \left(\dfrac{x + \ln(5x)}{x} \right)'$

$$= \frac{1-\ln(5x)}{x^2}$$

Valeurs critiques : $f'(x) = 0 \iff \dfrac{1-\ln(5x)}{x^2} = 0$

$$\iff \ln(5x) = 1$$

$$\iff 5x = e$$

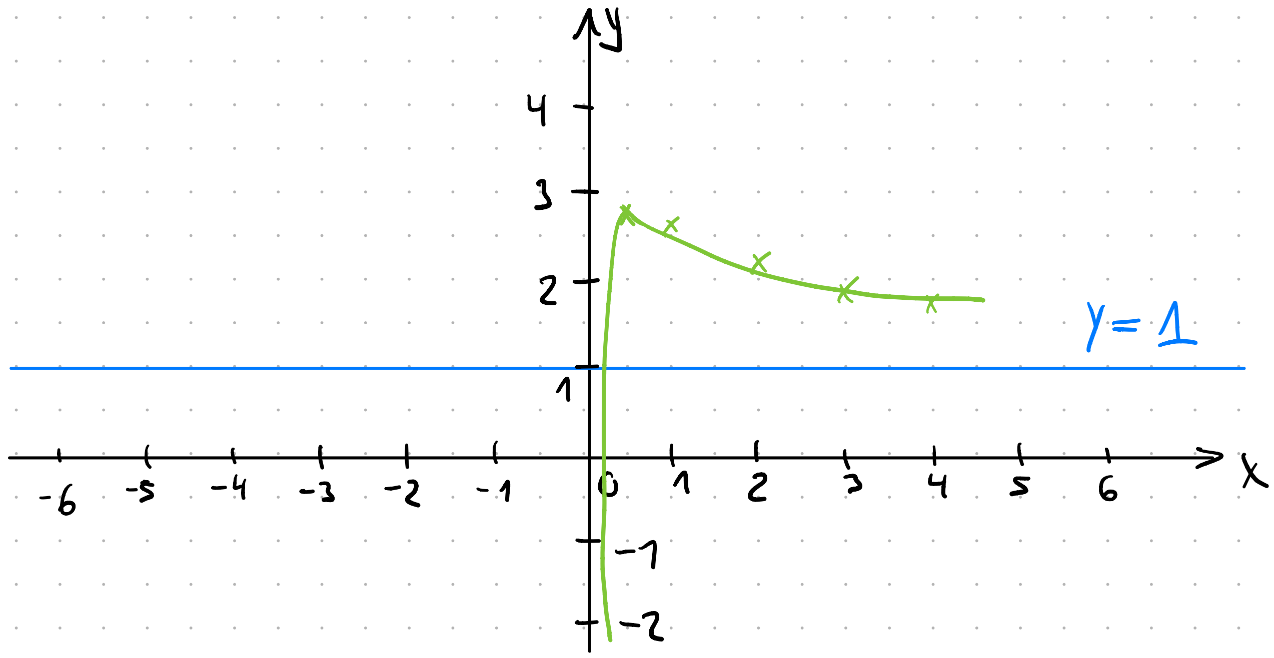
$$\iff x = \frac{e}{5}$$

T.d.v

	0		$\frac{e}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$1+\frac{5}{e}$	$\searrow$	1

$$f\left(\frac{e}{5}\right) = \frac{\frac{e}{5} + \ln\left(5 \cdot \frac{e}{5}\right)}{\frac{e}{5}} = \frac{\frac{e}{5}+1}{\frac{e}{5}} = 1 + \frac{5}{e}$$

$\boxed{4}$



Exercice 147

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(ae^x + b)$ où a et b sont deux nombres réels strictement positifs. On sait, de plus, que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et que la tangente au point A d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$.
Parmi les affirmations suivantes, plusieurs peuvent être exactes. Identifier-les en justifiant vos réponses.

1 $f(x) = \ln(e^x + 1)$

2 $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote parallèle à l'axe des abscisses.

3 $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique.

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(\underbrace{e^x + 1}_{\to 1}) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

$f'(0) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Donc, l'affirmation est vraie.

$\boxed{2}$ Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\hookrightarrow$ $\mathscr{C}_f$ admet une A.H. : $y = 0$ en $-\infty$

est $y = 0$ est (Ox)

$\Rightarrow$ Donc vraie.

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(\underbrace{ae^x + b}_{\to +\infty}) = +\infty$

$\Rightarrow$ pas d'A.H. en $+\infty$

Recherche d'une A.O.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(ae^x+b)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x(a+be^{-x}))}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x)+\ln(a+be^{-x})}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln(a+be^{-x})}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 + \underbrace{\frac{\ln(a+be^{-x})}{x}}_{\to 0}$$

$$= 1 \quad (a=1)$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty} [\ln(ae^x+b)-x]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left\{\ln[e^x(a+be^{-x})] - x\right\}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln(e^x) + \ln(a+be^{-x}) - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln(a+\underbrace{be^{-x}}_{\to 0})$$

$$= \ln(a)$$

Finalement : A.O. : $y = x + \ln(a)$

$\Rightarrow$ l'affirmation est donc vraie.

Exercice 148

1 f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x^3 + x^2 + \ln x$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0;+\infty[$. Donner un encadrement de cette solution à 10^{-2} près.

2 f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x^3 - x^2 + \ln x$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0;+\infty[$. Donner un encadrement de cette solution à 10^{-2} près.

$\boxed{1}$ $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \big(\underbrace{2x^3+x^2}_{\to 0} + \underbrace{\ln(x)}_{\to -\infty}\big)$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \big(\underbrace{2x^3+x^2}_{\to +\infty} + \underbrace{\ln(x)}_{\to +\infty}\big)$$

$$= +\infty$$

$\forall x>0 : f'(x) = 6x^2 + 2x + \frac{1}{x}$

Valeurs critiques : $f'(x) = 0 \iff 6x^2 + 2x + \frac{1}{x} = 0$

$\iff 6x^3 + 2x^2 + 1 = 0$

il suit, $\forall x > 0 : f(x) > 0$

<u>T.d.v.</u>

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(x)$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0;+\infty[$,
et $0 \in]-\infty;+\infty[= f(]0;+\infty[)$
$\Rightarrow f(x)$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$

Calculatrice : $0{,}54 < \alpha < 0{,}55$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{2x^3}_{\to 0} - \underbrace{x^2}_{\to 0} + \underbrace{\ln(x)}_{\to 0}$

$= 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 - x^2 + \ln(x)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{x^3}_{\to +\infty} \underbrace{\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x^3}\right)}_{\to 2}$

$= +\infty$

$\forall x > 0 : \quad f'(x) = 6x^2 - 2x + \frac{1}{x}$

Valeurs critiques : $f'(x) = 0 \iff 6x^2 - 2x + \frac{1}{x} = 0$

$\iff 6x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

Posons : $g(x) = 6x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 18x^2 - 4x$

Valeurs critiques : $g'(x) = 0 \iff x(18x - 4) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = \frac{2}{9}$

$\hookrightarrow (\notin D_f)$

T.d.v.

x	0		$\frac{2}{9}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$\frac{235}{243}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{235}{243}$

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(x)$

$= 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(6x^3 - 2x + 1\right)$

$= +\infty$

Donc $g(x) = f'(x) > 0 \quad \forall x > 0$

<u>T.d.v.</u>

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, et $0 \in]-\infty;+\infty[= f(]0;+\infty[)$

$\Rightarrow f(x) = 0$ admet une seule solution unique α sur $]0;+\infty[$

Calculatrice : $0{,}75 < \alpha < 0{,}76$

Exercice 149

Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x+2) - x$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal. Montrer qu'il existe une seule tangente à $\mathscr{C}_f$ passant par le point $A(-2;0)$. Déterminer une équation de cette tangente.

$$\forall x \in]-2;+\infty[: f'(x) = \frac{1}{x+2} - 1$$

$$= \frac{1-x-2}{x+2}$$

$$= \frac{-x-1}{x+2}$$

$$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$= \frac{-a-1}{a+2}(x-a) + \ln(a+2) - a$$

$$A(-2;0) \in T_a \iff 0 = \frac{-a-1}{a+2}(-2-a) + \ln(a+2) - a$$

$$\iff 0 = \frac{(-a-1)(-2-a)}{a+2} + \ln(a+2) - a$$

$$\iff 0 = \frac{2a + a^2 + 2 - a}{a+2} + \ln(a+2) - a$$

$$\iff 0 = \frac{a^2 + a + 2}{a+2} - a + \ln(a+2)$$

$$\iff 0 = \frac{(a+1)\cancel{(a+2)}}{\cancel{a+2}} - a + \ln(a+2)$$

$$\iff \ln(a+2) - a + a + 1 = 0$$

$$\iff \ln(a+2) = -1$$

$$\iff a+2 = \frac{1}{e}$$

$$\iff a = \frac{1}{e} - 2$$

$$f\left(\frac{1}{e}-2\right) = \ln\left(\frac{1}{e} - 2 + 2\right) - \frac{1}{e} + 2$$

$$= -\ln(e) - \frac{1}{e} + 2$$

$$= 1 - \frac{1}{e}$$

$$f'\left(\frac{1}{e}-2\right) = \frac{-\frac{1}{e} + 2 - 1}{\frac{1}{e} - 2 + 2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{e} + 1}{\frac{1}{e}}$$

$$= -1 + e$$

Donc :

$$T_{\frac{1}{e}-2} : y = f'\left(\frac{1}{e}-2\right)(x-a) + f\left(\frac{1}{e}-2\right)$$

$$= (e-1)\left(x - \frac{1}{e} + 2\right) + 1 - \frac{1}{e}$$

$$= ex \cancel{-1} + 2e - x \cancel{+\frac{1}{e}} - 2 \cancel{+1} \cancel{-\frac{1}{e}}$$

$$= (e-1)x + 2e - 2$$

Exercice 150

Soient a et b deux réels. On note f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = a \ln x + b$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal. Déterminer les réels a et b tels que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse e ait pour équation $y = 2x - e$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = \frac{a}{x}$

Or comme $t_e \equiv y = 2x - e$ ①

On sait que : $f'(e) = 2 \iff \dfrac{a}{e} = 2$

$\iff a = 2e$

De plus : $t_e \equiv y = f'(e)(x-e) + f(e)$

$= \dfrac{a}{e}(x-e) + a\ln(e) + b$

$= \dfrac{2e}{e}(x-e) + 2e + b$

$= 2x \cancel{-2e} \cancel{+2e} + b$

$= 2x + b$

Avec ①, on trouve : $2x + b = 2x - e$

$\iff b = -e$

Finalement : $a = 2e$; $b = -e$

Exercice 151

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = ax + b + \frac{\ln x}{x}$ où a et b désignent deux réels. $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 Déterminer les réels a et b sachant que le point $A(1;0)$ est le point de $\mathscr{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 2$.

2 On note g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$.

a. Démontrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, $g(x) > 0$.

b. En déduire que f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

$\boxed{1}$ Comme : $A(1;0) \in \mathscr{C}_f$, on a :

$f(1) = 0 \iff a + b + 0 = 0$

$\iff b = -a$ ①

Comme $t_1 // d$ avec $d \equiv y = 3x + 2$, il suit que $f'(1) = 3$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = a + \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2}$

$= a + \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$

D'où : $f'(1) = 3 \iff a + \dfrac{1-0}{1^2} = 3$

$\iff a = 2$

Dans ①: $b = -2$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 2x - 2 + \dfrac{\ln(x)}{x}$

$\boxed{2}$

a. $\forall x > 0$: $g'(x) = 4x - \dfrac{1}{x}$

Valeurs critiques : $g'(x) = 0 \iff 4x = \dfrac{1}{x}$

$\iff \dfrac{4x^2-1}{x} = 0$

$\iff 4x^2 - 1 = 0$

$\iff (2x-1)(2x+1) = 0$

$\iff x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{R}_+^*$

T.d.v.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x^2-1$		$-$	0	$+$	
x	0	$+$		$+$	
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2} + \ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{3}{2} + \ln(2)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\underbrace{2x^2}_{\to 0} + 1 \underbrace{- \ln(x)}_{\to +\infty}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x^2 + 1 - \ln(x)\right)$

$$= +\infty$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \underbrace{\left(2 + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2}\right)}_{\to 2}$$

$$= +\infty$$

Comme g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (car dérivable) et g admet un minimum absolu en $\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2} + \ln(2)\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, il suit que $g(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, car :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + \ln(2) > 0$$

b. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 2 + \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$

$$= \frac{2x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2}$$

$$= \frac{g(x)}{x^2}$$

On vient de démontre en a. que $g(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

On sait que $x^2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

Il suit donc que $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 152

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$2\ln(x) + \ln\left(-3x^2 + 7\right) = 2\ln 2$$

C.E. : $x > 0$ et $-3x^2 + 7 > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$ et $3x^2 - 7 < 0$

$\Leftrightarrow x > 0$ et $3x^2 < 7$

$\Leftrightarrow x > 0$ et $x^2 < \frac{7}{3}$

$\Leftrightarrow x > 0$ et $x > -\sqrt{\frac{7}{3}}$ ou $x < \sqrt{\frac{7}{3}}$

Donc : $D =]0; \sqrt{\frac{7}{3}}[$

$\forall x \in D$: $2\ln(x) + \ln(-3x^2+7) = 2\ln(2)$

$\iff \ln(x^2) + \ln(-3x^2+7) = 2\ln(2)$

$\iff \ln[x^2(-3x^2+7)] = \ln(4)$

$\iff -3x^4 + 7x^2 - 4 = 0$

Posons : $y = x^2$

$\Rightarrow -3y^2 + 7y - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 49 - 4 \cdot 3 \cdot 4$

$= 1$

$y_1 = \frac{-7-1}{-2 \cdot 3} = \frac{4}{3}$

$y_2 = \frac{-7+1}{-2 \cdot 3} = 1$

On a : $y = \frac{4}{3}$ ou $y = 1$ et $y = x^2$

$\iff x^2 = \frac{4}{3}$ ou $x^2 = 1$

$\iff x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ou $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ou $x = -1$ ou $x = 1$

$\hookrightarrow \notin D$ $\hookrightarrow \notin D$

$S = \{1; \frac{2\sqrt{3}}{3}\}$

Exercice 153

Déterminer le tableau des signes de l'expression suivante :

$$f(x) = \ln(x^3 - 5x^2 + 6x)$$

C.E. : $x^3 - 5x^2 + 6x > 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 5x + 6) > 0$

$\Leftrightarrow x(x-2)(x-3) > 0$

T.d.s.

	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-2)(x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f =]0;2[\cup]3;+\infty[$

Recherche des racines :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^3 - 5x^2 + 6x) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$

Soit $g(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 1$

$\forall x \in \mathbb{R}, \; g'(x) = 3x^2 - 10x + 6$

Valeurs critiques : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

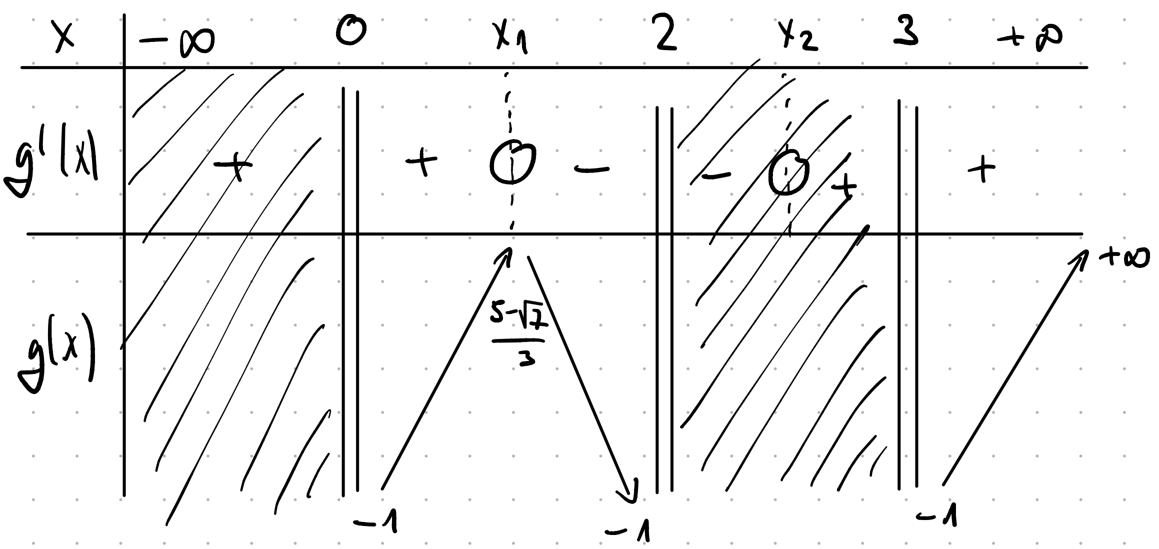
$= 100 - 4 \cdot 3 \cdot 6$

$$= 28 \quad (>0)$$

$$x_1 = \frac{10-\sqrt{28}}{2\cdot 3} = \frac{5-\sqrt{7}}{3}$$

$$x_2 = \frac{10+\sqrt{28}}{2\cdot 3} = \frac{5+\sqrt{7}}{3} \quad \notin D_f$$

<u>T.d.v.</u>



$$g(0) = 0^3 - 5\cdot 0^2 + 6\cdot 0 - 1$$
$$= -1$$

$$g(2) = 2^3 - 5\cdot 2^2 + 6\cdot 2 - 1$$
$$= -1$$

$$g(3) = 3^3 - 5\cdot 3^2 + 6\cdot 3 - 1$$
$$= -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 + 5x^2 + 6x - 1$$
$$= +\infty$$

Comme g est continue sur $]0; x_1[$ et sur $]3; +\infty[$ (car dérivable) et g est strictement croissante sur $]0; x_1[$ et sur $]3; +\infty[$ et comme $0 \in]1; g(x_1)[= g(]0; x_1[)$ et $0 \in]-1; +\infty[= g(]3; +\infty[)$, il suit que $g(x) = 0$ admet une solution unique α_1 sur $]0; x_1[$ et une solution unique α_3 sur $]3; +\infty[$.

Comme g est continue sur $]x_1; 2[$ (car dérivable) et g est

strictement décroissante sur $]x_1;2[$, et $0 \in]-1;g(x_1)[= g(]x_1;2[)$,
il suit que $g(x)=0$ admet une solution unique α_2 sur $]x_1;2[$.

$\Rightarrow$ f admet alors 3 solutions sur D_f :

T.d.s.

	$-\infty$		0		α_1		α_2		2		3		α_3		$+\infty$
$f(x)$			$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Exercice 154

On note par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. Déterminer dans les différents cas les coordonnées des points d'intersection éventuels entre $\mathscr{C}_f$ et les axes du repère.

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(x+9) + \ln(11-x)$$

C.E. : $x+9 > 0$ et $11 - x > 0$

$\Leftrightarrow x > -9$ et $x < 11$

$D_f =]-9;11[$

$f(0) = \frac{1}{2}\ln(0+9) + \ln(11-0)$

$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \ln(3) + \ln(11)$

$= \ln(33)$

$\mathscr{C}_f \cap (Ox) = \{(0;\ln(33))\}$

$\forall x \in D_f$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(x+9) + \ln(11-x) = 0 \quad |\cdot 2$

$$\iff \ln\left[|x+9|\,(11-x)^2\right]=0$$

$$\iff (x+9)(121-22x+x^2)=1$$

$$\iff 121x-22x^2+x^3+1089-198x+9x^2-1=0$$

$$\iff x^3-13x^2-77x+1088=0$$

Soit : $g(x)=x^3-13x^2-77x+1088$

$\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=3x^2-26x-77$

Valeurs critiques :

$$g'(x)=0 \iff 3x^2-26x-77=0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 26^2+4\cdot 3\cdot 77\\ &= 1600\\ &= 40^2\end{aligned}$$

$$x_1=\frac{26-40}{2\cdot 3}=-\frac{7}{3}$$

$$x_2=\frac{26+40}{2\cdot 3}=11 \quad (\notin D_f)$$

T.d.v.

x	-9		$-\frac{7}{3}$		11
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{31\,973}{27}$	$\searrow$	-1

$g(-9) = (-9)^3 - 13\cdot(-9)^2 - 77\cdot(-9) + 1088$

$= -1$

$g(11) = 11^3 - 13\cdot 11^2 - 77\cdot 11 + 1088$

$= -1$

$g\left(-\frac{7}{3}\right) = \left(-\frac{7}{3}\right)^3 - 13\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)^2 - 77\cdot\left(-\frac{7}{3}\right) + 1088$

$= \frac{31\,973}{27}$

Comme g est continue sur $\left]-9\,;-\frac{7}{3}\right[$ (car dérivable) et strictement croissante sur $\left]-9\,;-\frac{7}{3}\right[$, et $0 \in \left]-1\,;\frac{31\,973}{27}\right[= g\left(\left]-9\,;-\frac{7}{3}\right[\right)$ il suit que $g(x)=0$ admet une solution unique α_1 sur $\left]-9\,;-\frac{7}{3}\right[$.

Comme g est continue sur $\left]-\frac{7}{3}\,;11\right[$ (car dérivable) et strictement décroissante sur $\left]-\frac{7}{3}\,;11\right[$, et $0 \in \left]-1\,;\frac{31\,973}{27}\right[= g\left(\left]-\frac{7}{3}\,;11\right[\right)$, il suit que $g(x)=0$ admet une solution unique α_2 sur $\left]-\frac{7}{3}\,;11\right[$.

Finalement : $\mathscr{C}_f \cap (Ox) = \{(\alpha_1\,;0)\,;\,(\alpha_2\,;0)\}$

Exercice 155

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1 Vérifier si f est continue en 0.

2 Vérifier si f est dérivable en 0.

$\boxed{1}$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ f.i. " $\frac{0}{0}$ "

Posons : $y = 1+x^2 \implies x = \sqrt{y-1}$

si $x \to 0$, alors $y \to 1^+$

d'où : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{y \to 1^+} \frac{\ln(y)}{\sqrt{y-1}}$

$$= \lim_{y \to 1^+} \underbrace{\frac{\ln(y)}{y-1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sqrt{y-1}}_{\to 0}$$

$$= 0 \quad (= f(0))$$

Donc f est continue en 0.

$\boxed{2}$ $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x}}{x}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$$

Posons : $y = 1+x^2 \implies x = \sqrt{y-1}$

si $x \to 0$, alors $y \to 1^+$

$$= \lim_{y \to 1^+} \underbrace{\frac{\ln(y)}{\sqrt{y-1}}}_{\to 1}$$

$$= \underline{1}$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.